

離散時間系に対する 最適追従制御器および最適値の解析解

○岡島 寛（熊本大学）， 浅井 徹（大阪大学）， 川路茂保（熊本大学）

研究背景, 本研究の目的

問題設定

主結果 (最適制御器と最適値)

数値例

まとめ

研究背景, 本研究の目的

問題設定

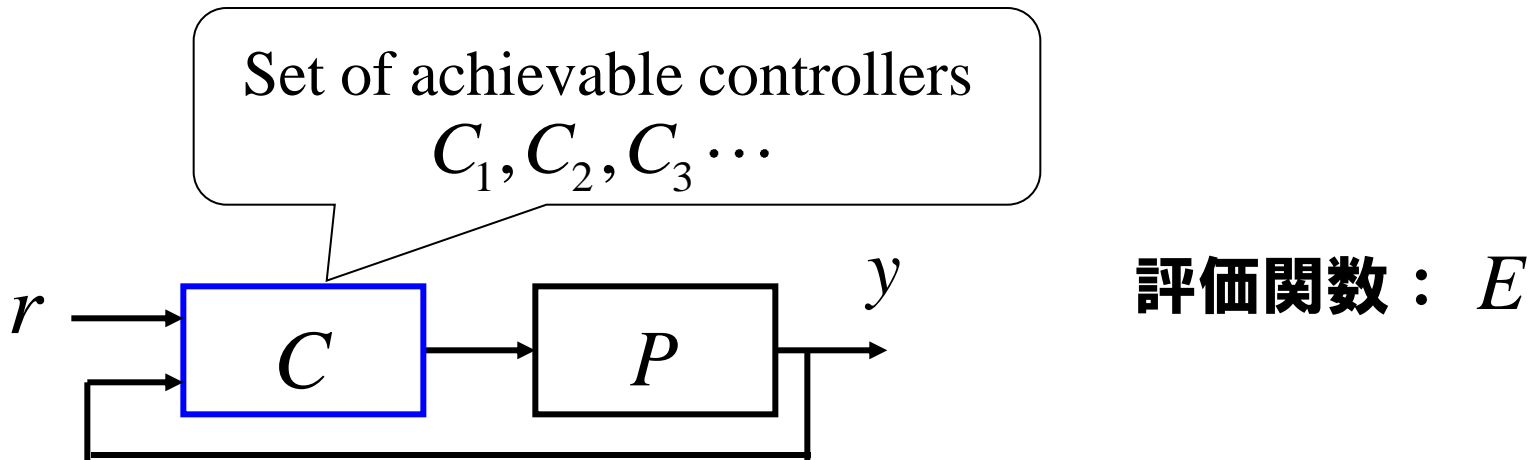
主結果 (最適制御器と最適値)

数値例

まとめ

制御系設計

制御器の調整を行ってもこれ以上性能を良くできない限界が存在



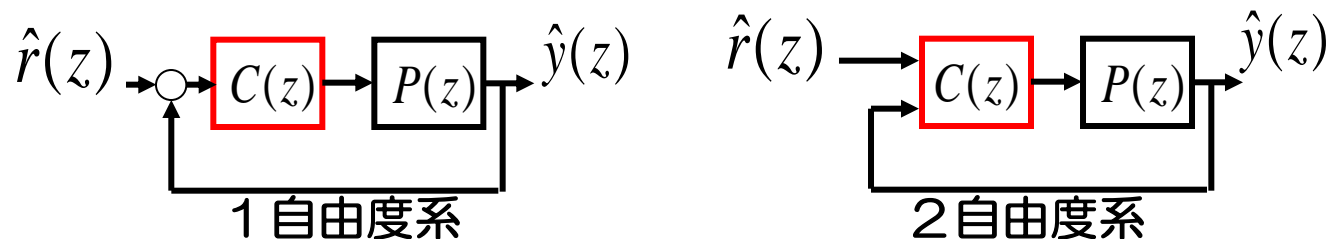
本質的な制御性能限界 = 最適値

最適値を求めることは、**性能評価の指標**としても有用

本研究の目的

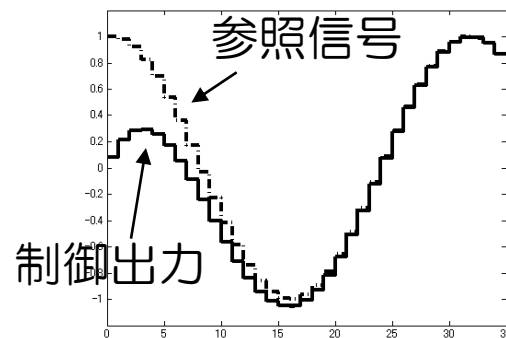
5

離散時間線形時不変系 (SISO)



制御系がそれぞれ満たすべき条件

制御系が安定, 出力が参照信号に追従



追従誤差の最適値 (出力応答向上のため)

$$J = \min \sum_{k=0}^{\infty} (y(k) - r(k))^2$$

偏差の l_2 が最小値を取る意味で最適

追従誤差の最適値とそれを達成する制御器の解析解を求める

最適値を解析的に導出

制御対象，参照信号の極や零点を**変数として残したまま最適値を表現**（J. Chen 2000など）

- ・制御対象を制御しやすいものに設計する際の指標となる
- ・制御系の本質的な制御しやすさを捉えやすい

$$J = \sum_{k=0}^n \frac{2\operatorname{Re}(z_k)}{|z_k|^2} \quad \text{零点の関数}$$

LMIなどの数値解法

- ・制御対象の**パラメータ値**が与えられなければ最適値が求まらない

- ・数値誤差

$$P = \frac{s - 0.25}{s + 1.3} \quad \longrightarrow \quad J = 8$$

本研究の位置付け

7

評価関数の最適値の解析解

連続 : $J = \inf \int_0^{\infty} (y(t) - r(t))^2 dt$ 離散 : $J = \min \sum_{k=0}^{\infty} (y(k) - r(k))^2$

制御系	参照信号	ステップ	正弦波	$\hat{r}(z)$ の関数形を残したより広いクラスの信号
連続時間	2自由度系	[J. Chen 2000]	[W. Su 2003,2006]	[岡島 2007]
	1自由度系	[J. Chen 2000]	[岡島 2007]	[岡島 2007]
離散時間	2自由度系	[J. Chen 2002]	[W. Su 2007]	本発表
	1自由度系	[J. Chen 2002]	本発表	本発表

さらに

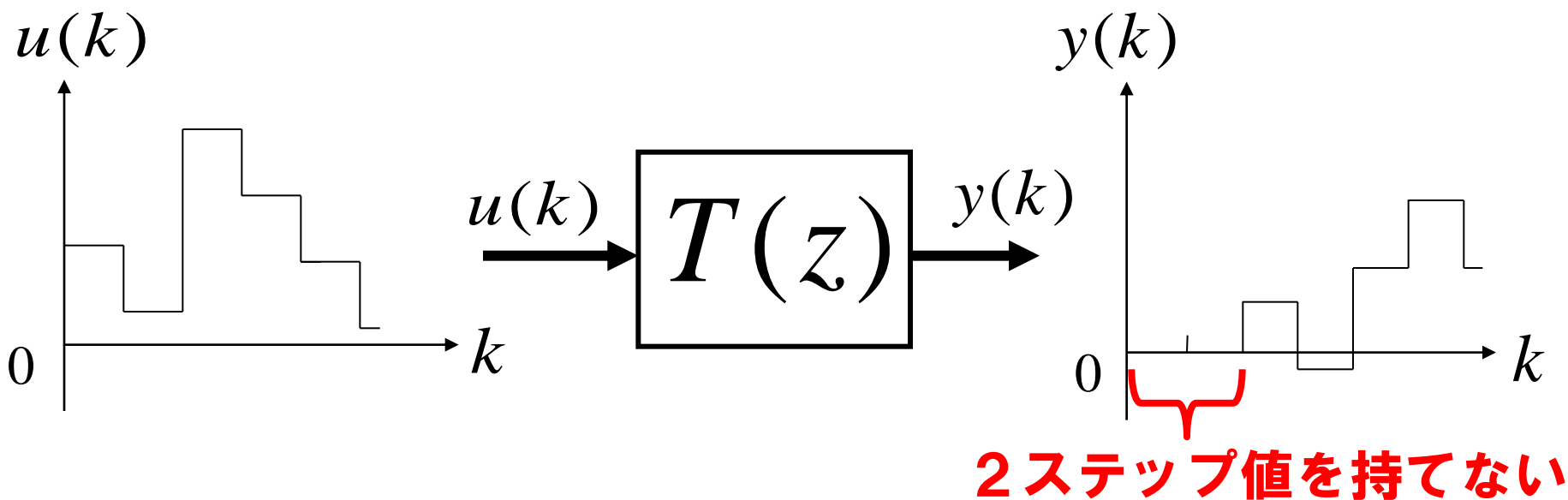
離散時間系では、不安定零点、不安定極だけでなく相対次数によっても最適値が異なる

本研究の位置付け

離散時間伝達関数

$$T(z) = \frac{K(z - a_1)}{(z - b_1)(z - b_2)(z - b_3)}$$

...**相対次数2**



相対次数に起因する**制御性能劣化**が存在

本研究の位置付け

評価関数の最適値の解析解

	ステップ	正弦波	$\hat{r}(z)$ の関数形を残したより広いクラスの信号	
連続	2自由度系 1自由度系	[J. Chen 2000]	[W. Su 2003,2006] [岡島 2007]	[岡島 2007]
離散時間	2自由度系	[J. Chen 2002] 相対次数の考慮	[W. Su 2007] 相対次数の考慮	本発表
	1自由度系	[J. Chen 2002] 相対次数の考慮	本発表	本発表

本研究で導出する解析解の特徴

1. 扱える参照信号のクラスが従来のものより広い
2. 制御対象の相対次数の影響を考慮した解である

研究背景, 本研究の目的

問題設定

主結果 (最適制御器と最適値)

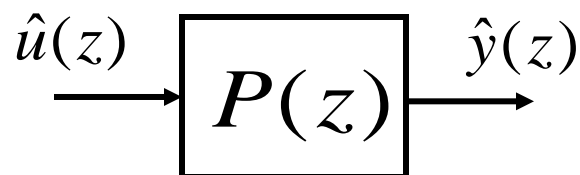
数値例

まとめ

問題設定

制御対象 (SISO) : $P(z)$

$$\hat{y}(z) = P(z)\hat{u}(z)$$



$y(k)$: 出力信号

$u(k)$: 入力信号

$$P(z) = \frac{\prod_{i=1}^{m_p} (z - \eta_i)}{\prod_{j=1}^{n_p} (z - \lambda_j)} P_0(z)$$

$P_0(z)$: 安定, 最小位相

- ・ **不安定零点** $\eta_1, \dots, \eta_{m_p}$ を持つ
- ・ **不安定極** $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_p}$ を持つ
- ・ **相対次数** : h_p

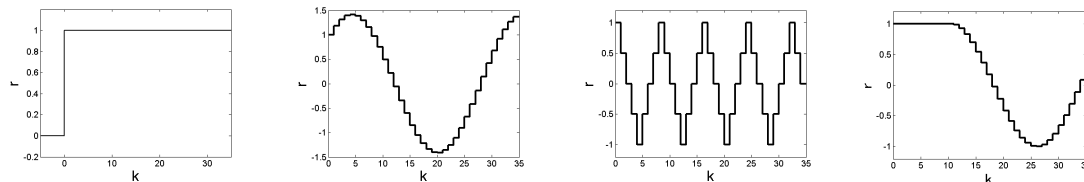
仮定: **極, 零点** は
それぞれ重複しない

$$z\text{-変換} : \hat{x}(z) = \mathcal{Z} [x(k)]$$

参照信号 $r(k)$ のクラス：

- ・ Z -変換 ($\hat{r}(z)$) が有理関数
- ・ l_∞ 有界

上記を満足する信号



1. 単位インパルス, **有限のインパルス列**, ステップ
2. **正弦波**, **三角波**
3. 減衰する指数信号
4. 1 ~ 3 の線形結合

参照信号の不安定零点

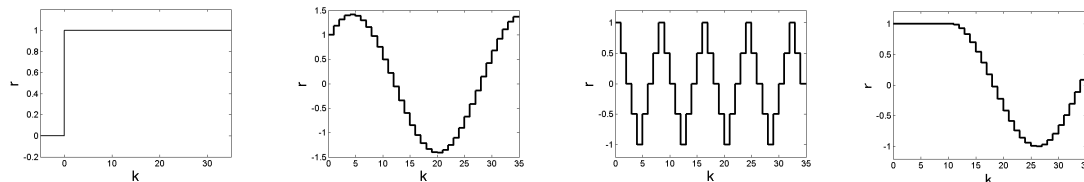
$$\eta_{m_p+1}, \dots, \eta_{m_p+m_r}$$

相対次数： h_r

参照信号 $r(k)$ のクラス：

- ・ Z -変換 ($\hat{r}(z)$) が有理関数
- ・ l_∞ 有界

上記を満足する信号



1. 単位インパルス, **有限のインパルス列**, ステップ
2. **正弦波**, **三角波**
3. 減衰する指数信号
4. 1 ~ 3 の線形結合

参照信号の不安定零点

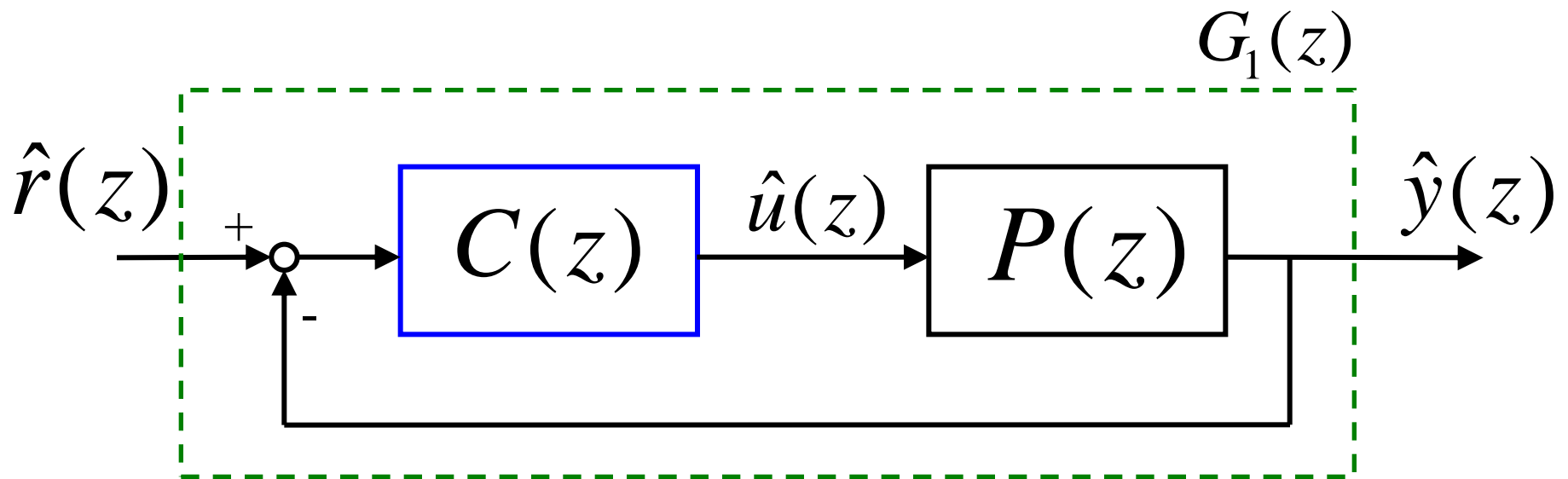
$$\eta_{m_p+1}, \dots, \eta_{m_p+m_r}$$

相対次数： h_r

$$m = m_p + m_r, h = h_p + h_r \text{ と表記}$$

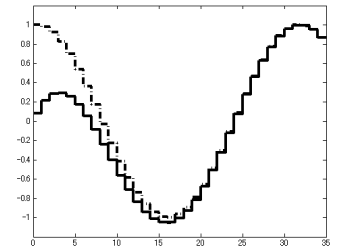
問題設定

1 自由度制御系（単位フィードバック系）



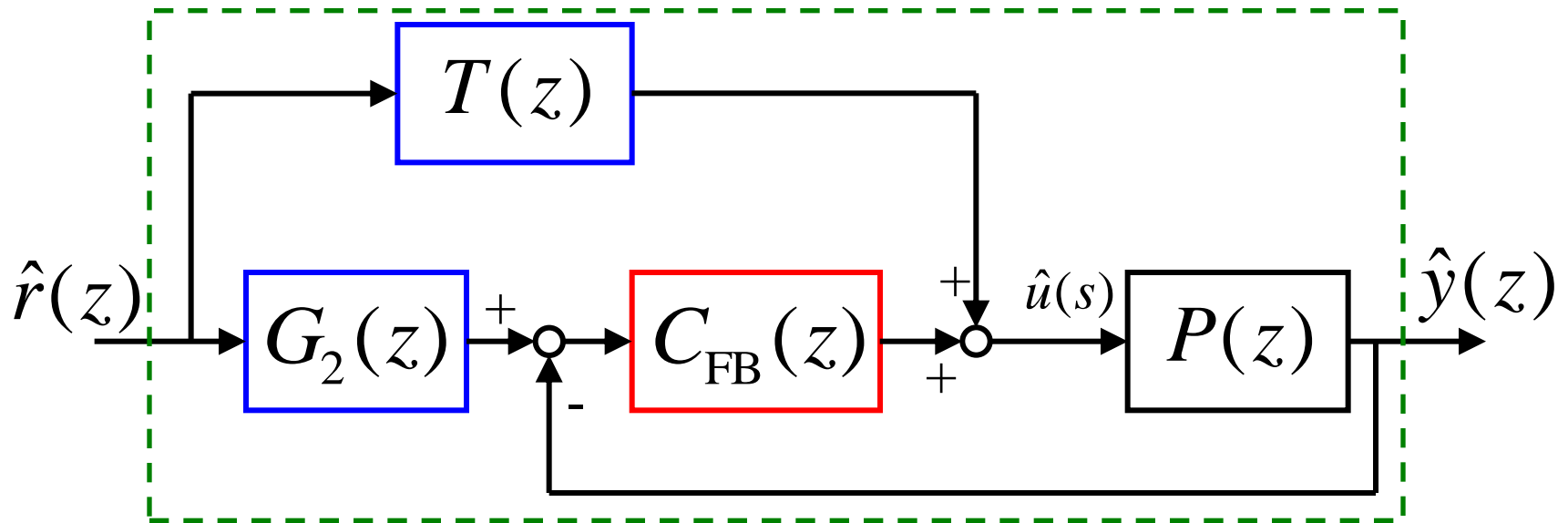
制御系が内部安定となるように $C(z)$ を設計

$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) - r(k) = 0$ も $C(z)$ によって満たす



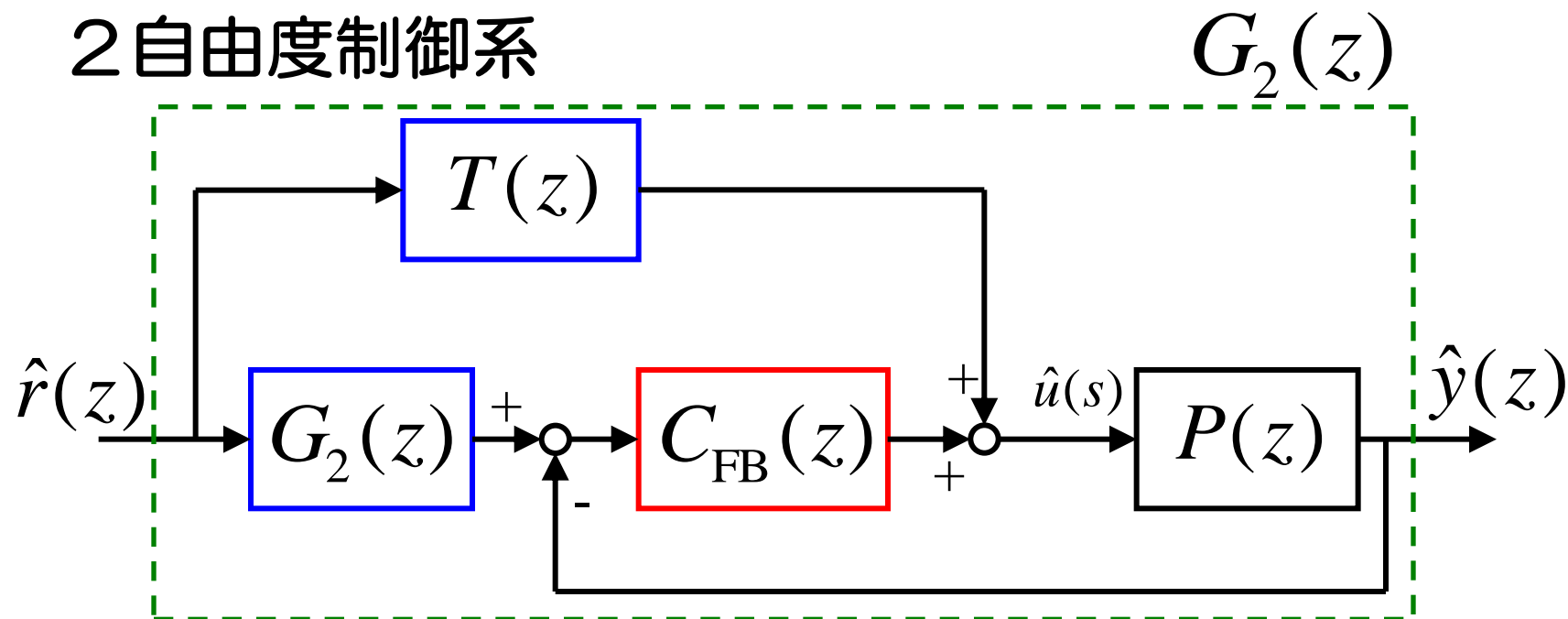
問題設定

2自由度制御系



問題設定

2自由度制御系



$$\underline{T(z) = G_2(z)P(z)^{-1}} \Rightarrow \underline{C_{FB}(z)} \text{ によらず } \underline{G_2(z) = \frac{\hat{y}(z)}{\hat{r}(z)}} \text{ が成立}$$

$G_2(z), T(z)$ が安定かつプロパーとなるように $\underline{G_2(z)}$ を設計

最適追従制御問題

17

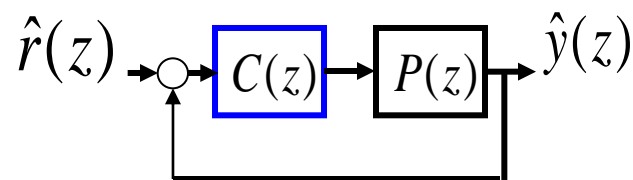
$P(z)$, $\hat{r}(z)$ が与えられたとする.

追従偏差の l_2 の最適値およびそれを達成する制御器を求めよ

$$J(P, \hat{r}) = \min \sum_{k=0}^{\infty} (y(k) - r(k))^2$$

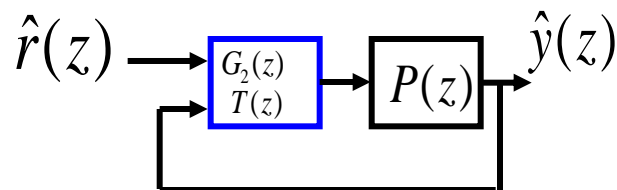
1 自由度制御系の場合

$J_{1\text{-DOF}}(P, \hat{r})$, $C(z)$ の解析解



2 自由度制御系の場合

$J_{2\text{-DOF}}(P, \hat{r})$, $G_2(z)$ の解析解



研究背景, 本研究の目的

問題設定

主結果 (最適制御器と最適値)

数値例

まとめ

連続時間系の場合と同じ手順で導出

1. 目標信号に漸近的に追従し有界な入力で達成可能な出力のパラメトリゼーション

(岡島, 浅井: システム制御情報学会論文誌 2007,1)

2. あるクラスの参照信号に対する追従性能限界の解析

(岡島, 浅井: 計測自動制御学会論文集 2007,9)

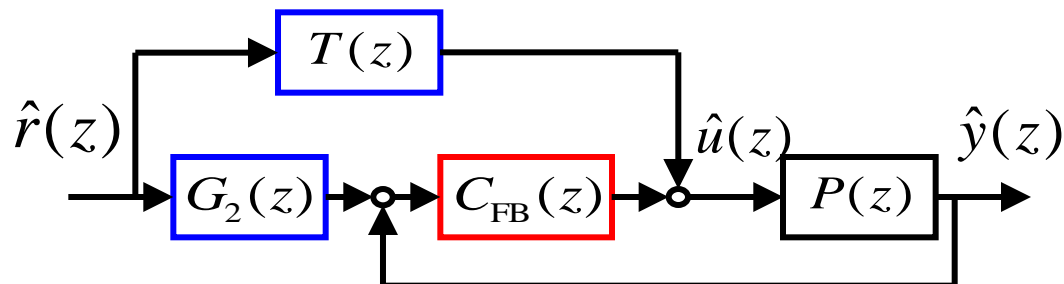
$J_*(P, \hat{r})$ の導出手順 :

1. 系が安定, 参照信号に追従する出力信号の集合を陽に求める
2. 集合を用いた計算から最適値を求める

2 自由度制御系

最適値

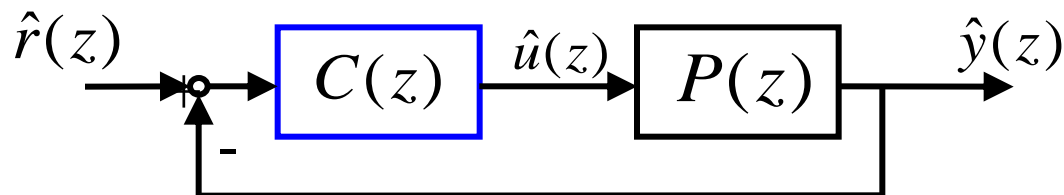
最適な制御器



1 自由度制御系

最適値

最適な制御器

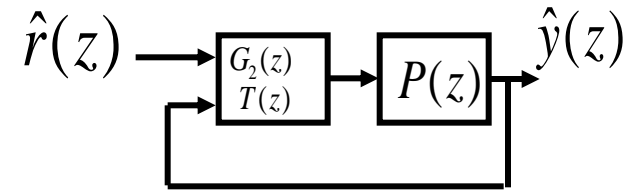


主結果 (2自由度制御系)

21

最適値

$$J_{2\text{-DOF}}(P, \hat{r}) = \tilde{J}_{2\text{-DOF}} + \hat{J}_{2\text{-DOF}}$$



制御対象の相対次数に依らない部分

$$\tilde{J}_{2\text{-DOF}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\bar{q}_i q_j}{\bar{\eta}_i \eta_j - 1}$$

$$q_i = \frac{\prod_{l=1}^m (\bar{\eta}_l \eta_i - 1)}{\prod_{l=1, l \neq i}^m (\eta_i - \eta_l)} \hat{r}(\eta_i)$$

相対次数に依存

$$\hat{J}_{2\text{-DOF}} = \sum_{k=1}^h (V_1(k) + V_2(k))^2$$

($V_1(k), V_2(k)$ は予稿参照)

η_i : 不安定零点

$\hat{r}(z)$: 参照信号

主結果（2自由度制御系）

最適値

$$J_{2\text{-DOF}}(P, \hat{r}) = \tilde{J}_{2\text{-DOF}} + \hat{J}_{2\text{-DOF}}$$

$$\tilde{J}_{2\text{-DOF}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\bar{q}_i q_j}{\bar{\eta}_i \eta_j - 1}$$

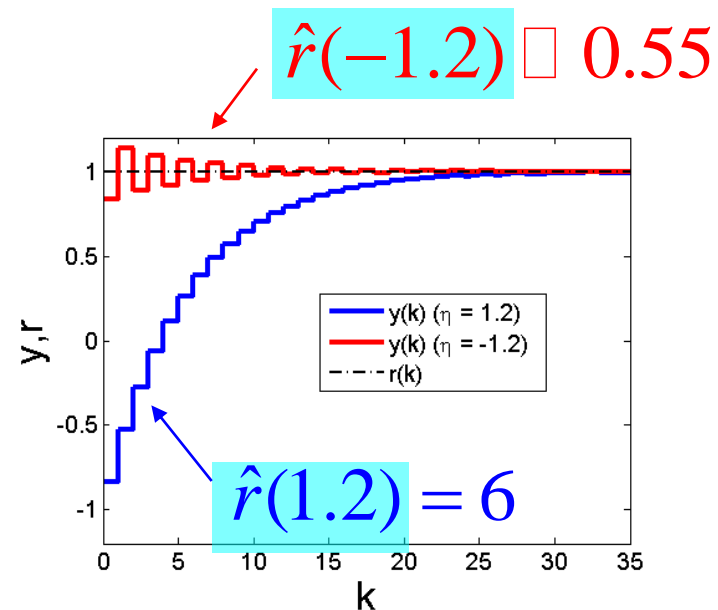
$$q_i = \frac{\prod_{l=1}^m (\bar{\eta}_l \eta_i - 1)}{\prod_{l=1, l \neq i}^m (\eta_i - \eta_l)} \hat{r}(\eta_i)$$

参照信号：ステップ目標値

$$\hat{r}(z) = \frac{z}{z-1} \quad \Rightarrow \quad \hat{r}(\eta) = \frac{\eta}{\eta-1}$$

制御対象：

$\eta = 1.2$ と $\eta = -1.2$ の比較



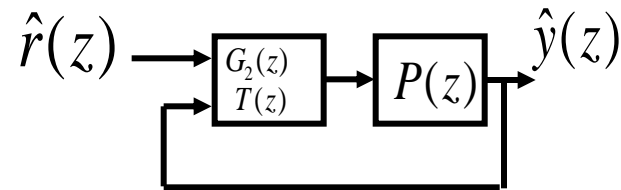
$\eta = 1.2$ (ステップの極に近い零点) では大きな追従誤差

主結果 (2自由度制御系)

23

最適値

$$J_{2\text{-DOF}}(P, \hat{r}) = \tilde{J}_{2\text{-DOF}} + \hat{J}_{2\text{-DOF}}$$



制御対象の相対次数に依らない部分

$$\tilde{J}_{2\text{-DOF}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\bar{q}_i q_j}{\bar{\eta}_i \eta_j - 1}$$

$$q_i = \frac{\prod_{l=1}^m (\bar{\eta}_l \eta_i - 1)}{\prod_{l=1, l \neq i}^m (\eta_i - \eta_l)} \hat{r}(\eta_i)$$

制御対象の相対次数に依存

$$\hat{J}_{2\text{-DOF}} = \sum_{k=1}^h (V_1(k) + V_2(k))^2$$

η_i : 不安定零点

$\hat{r}(z)$: 参照信号

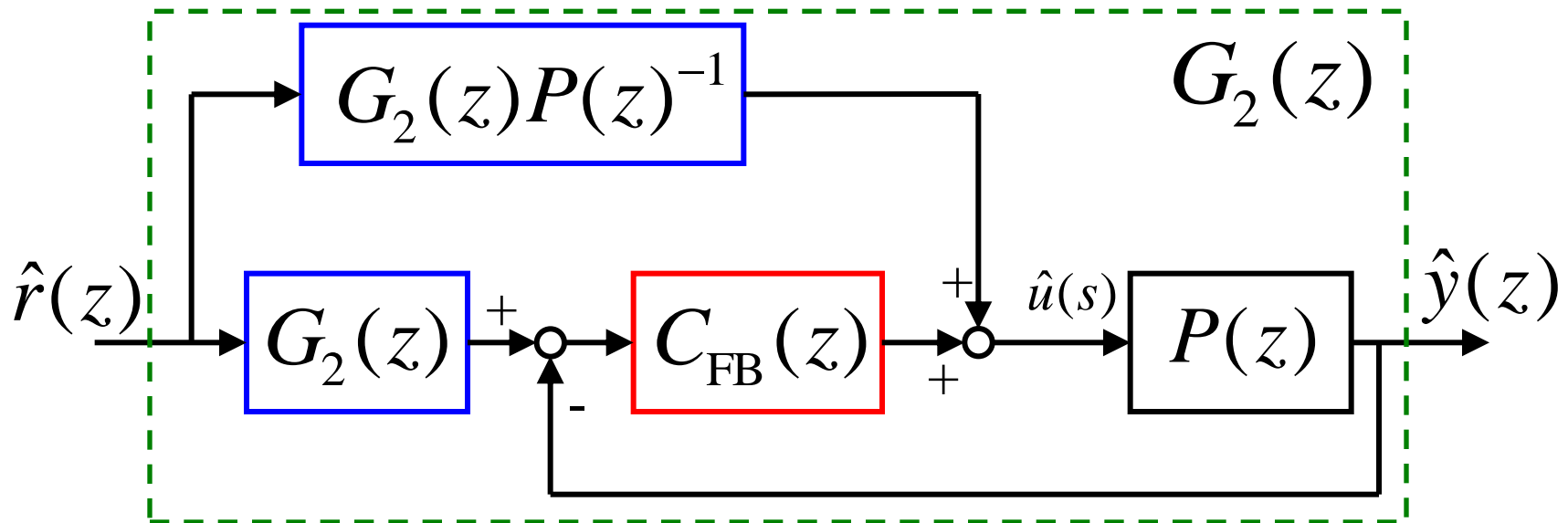
$J_{2\text{-DOF}}$: 参照信号の(単位円上)極と制御対象の不安定零点が近いと大きな値になる

主結果 (2自由度制御系)

最適な制御器

$$G_2^*(z) = \frac{\hat{y}^*(z)}{\hat{r}(z)} = \frac{\hat{r}(z) + A(z) + B(z)Q^*(z)}{\hat{r}(z)}$$

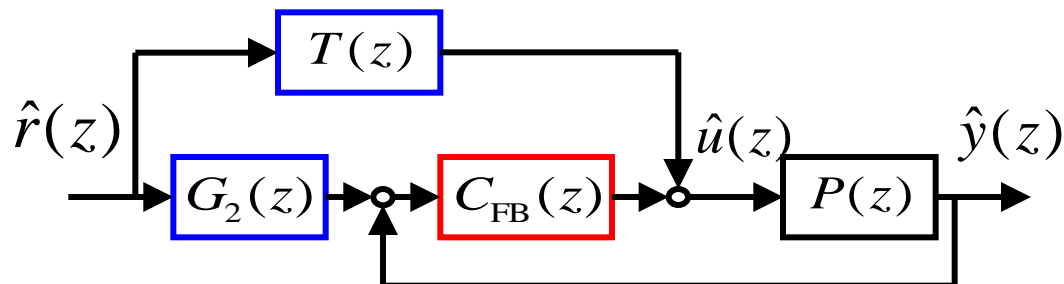
($Q^*(z)$ は予稿参照, 手計算で導出可)



2 自由度制御系

最適値

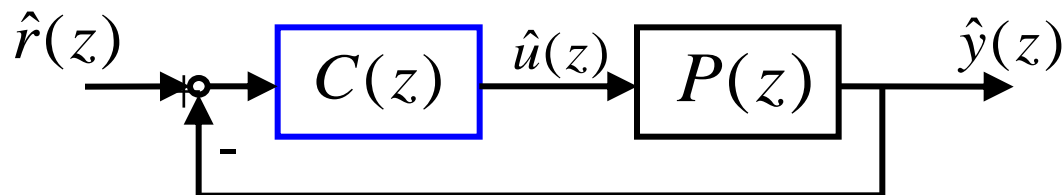
最適な制御器



1 自由度制御系

最適値

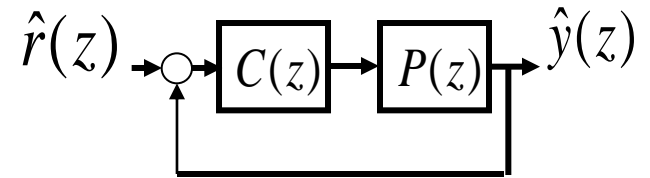
最適な制御器



主結果 (1自由度制御系)

26

最適値



$$J_{1\text{-DOF}}(P, \hat{r}) = \tilde{J}_{1\text{-DOF}} + \hat{J}_{1\text{-DOF}}$$

制御対象の相対次数に依らない部分

$$\tilde{J}_{1\text{-DOF}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\bar{q}_i q_j}{\bar{\eta}_i \eta_j - 1} \quad q_i = \frac{\prod_{l=1}^m (\bar{\eta}_l \eta_i - 1)}{\prod_{l=1, l \neq i}^m (\eta_i - \eta_l)} \frac{\prod_{l=1}^{n_p} (\bar{\lambda}_l \eta_i - 1)}{\prod_{l=1}^{n_p} (\eta_i - \lambda_l)} \hat{r}(\eta_i)$$

制御対象の相対次数に依存

$$\hat{J}_{1\text{-DOF}} = \sum_{k=1}^h (V_1(k) + V_2(k))^2$$

($V_1(k), V_2(k)$ は予稿参照)

η_i : 不安定零点

$\hat{r}(z)$: 参照信号

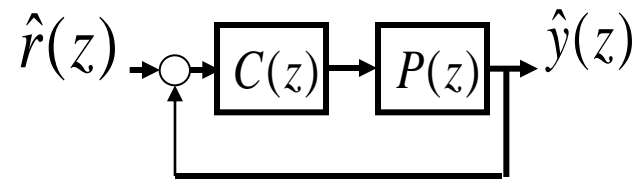
λ_i : 不安定極

(ただし, 制御対象が不安定極を持たない場合, **2自由度系と同じ最適値**)

主結果 (1自由度制御系)

27

最適値



$$J_{1\text{-DOF}}(P, \hat{r}) = \tilde{J}_{1\text{-DOF}} + \hat{J}_{1\text{-DOF}}$$

制御対象の相対次数に依らない部分

$$\tilde{J}_{1\text{-DOF}} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{q_i q_j}{\bar{\eta}_i \eta_j - 1} \quad q_i = \frac{\prod_{l=1}^m (\bar{\eta}_l \eta_i - 1)}{\prod_{l=1, l \neq i}^m (\eta_i - \eta_l)} \frac{\prod_{l=1}^{n_p} (\bar{\lambda}_l \eta_i - 1)}{\prod_{l=1}^{n_p} (\eta_i - \lambda_l)} \hat{r}(\eta_i)$$

制御対象の相対次数に依存

$$\hat{J}_{1\text{-DOF}} = \sum_{k=1}^h (V_1(k) + V_2(k))^2$$

η_i : 不安定零点

$\hat{r}(z)$: 参照信号

λ_i : 不安定極

制御対象の極・零点が近いと $J_{1\text{-DOF}}$ が大きくなる

主結果 (1自由度制御系)

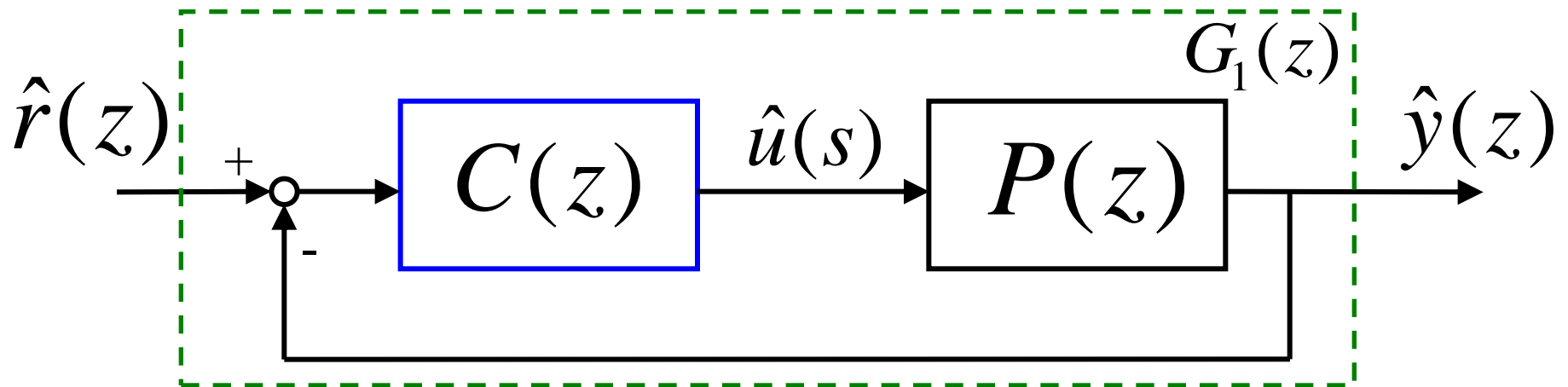
28

最適な制御器

$$C^*(z) = \frac{G_1^*(z)}{P(z)(1 - G_1^*(z))}$$

$$G_1^*(z) = \frac{\hat{y}^*(z)}{\hat{r}(z)} = \frac{\hat{r}(z) + A(z) + B(z)Q^*(z)}{\hat{r}(z)}$$

($Q^*(z)$ は予稿参照, 手計算で導出可)



研究背景, 本研究の目的

問題設定

主結果 (最適制御器と最適値)

数値例

まとめ

数値例 (相対次数の影響, 2自由度)

30

相対次数の影響項

最適値

$$J_{2\text{-DOF}}(P, \hat{r}) = \tilde{J}_{2\text{-DOF}} + \hat{J}_{2\text{-DOF}} \quad \hat{J}_{2\text{-DOF}} = \sum_{k=1}^h (V_1(k) + V_2(k))^2$$

制御対象

$$P(z) = (z - 1.2)P_0(z)$$

- $P(z)$ の相対次数が0 (細線)

$$\tilde{J}_{2\text{-DOF}} = 9.992$$

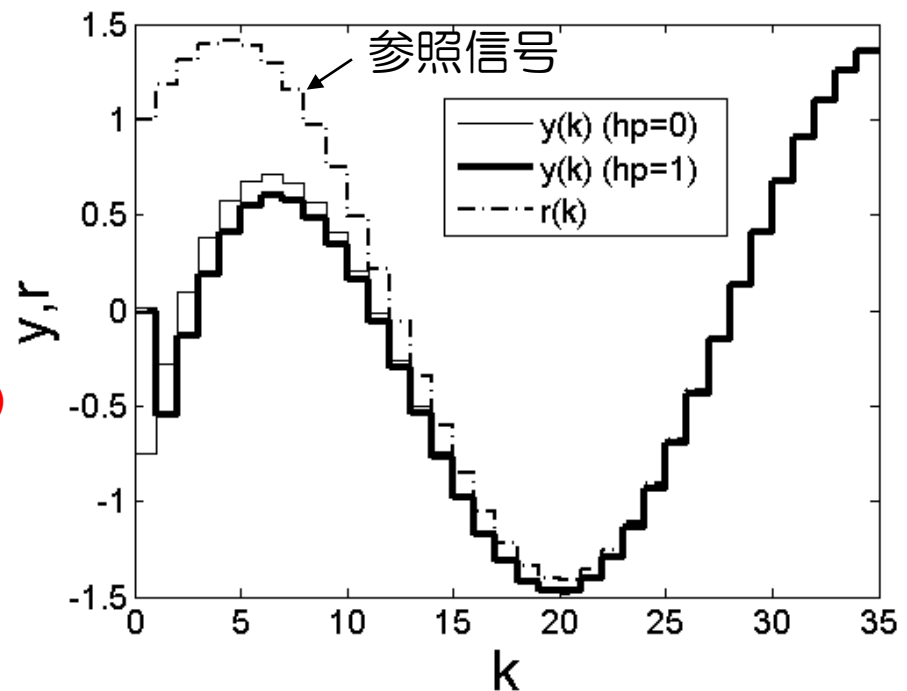
(零点などに起因する部分)

- $P(z)$ の相対次数が1 (太線)

$y(0) = 0$ となっている

$$\hat{J}_{2\text{-DOF}} = 0.8043$$

(相対次数に起因する部分)

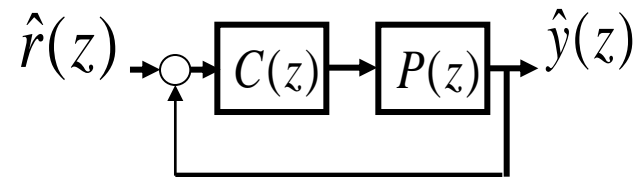


$h=0$ と $h=1$ の比較

数値例 (1自由度制御系)

制御対象：

$$P(z) = \frac{z-1.2}{z-\lambda} P_0(z) \quad (\text{相対次数 } 0)$$



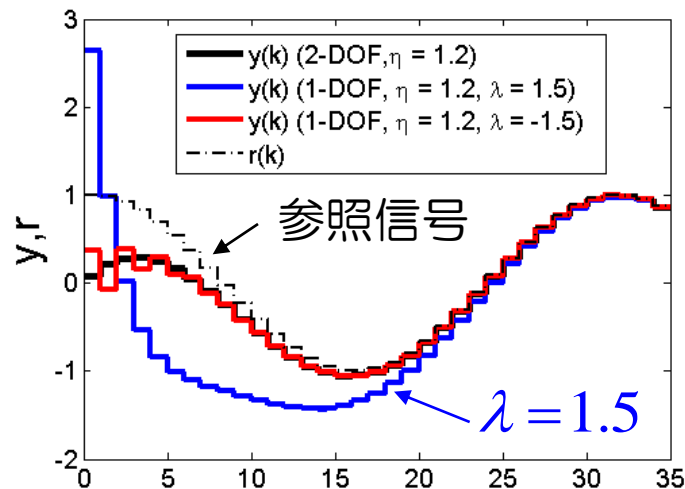
最適値

$$J_{1\text{-DOF}} = (1.2^2 - 1) \left(\frac{1.2\lambda - 1}{1.2 - \lambda} \right)^2 \hat{r}(1.2)^2$$

λ が 1.2 に近いと $J_{1\text{-DOF}}$ が
大きな値となる

実際

$\lambda = 1.5$ で悪い過渡特性を示す



$\lambda = 1.5$ と $\lambda = -1.5$ の比較

本発表では...

1 自由度制御系, 2 自由度制御系のそれぞれについて追従偏差の1 2ノルムの意味での最適値およびそれを達成する制御器を解析的に求めた

1. **相対次数**の影響を考慮した解
2. 参照信号の**クラスが広く**, 従来扱われていない信号を利用可能

得られた解析解からわかること

- **参照信号**の単位円上の極と**制御対象**の不安定零点が近いと最適値が大きくなる (=制御しにくい)
- **制御対象**の不安定極, 零点が近いと与えられた参照信号に関らず制御が困難 (1-DOF)

今後の課題

リファレンスガバナの枠組みへの応用など